数理解析研究所講究録
319巻 1978年 79-83

Reality に関する2,3の注意

島根大・文理　　松永弘道

可微分実多様体はこれを含む複素多様体の実部である様にすることができる。([7] n°1). 一方2次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ の開集合 D から $\mathbb{C}^2$ への正則写像は,特異値 a の逆像を D から除いた部分で単射であるとき, schlicht であるといわれるが,この様な写像については H. Hopf の論文 [4] で詳しく調べられている。しかし,後で見る様に fold point, cusp point の近くで $f: D \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は schlicht でない。この様な状況のもとで, H. Whitney の論文 [6] の複素類似,すなわち写像そのものの複素化について調べてみた。この論文は4つの部分からなっているが,最後の部分を除いて局所的には類似可能であるとの結論を得た。D を複素空間 $\mathbb{C}^2(x, y)$ の開集合とし, $f: D \longrightarrow \mathbb{C}^2(u, v)$ を正則写像とするとき, f の関数行列式,およびその1次偏微分係数のうち0でないものがある様な点は, f の good point とよばれる。D のすべての点が good である写像は good とよばれる。$V = (a, b)$ を $\mathbb{C}^2$ の中の

ベクトルとするとき，作用素 $\nabla_V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ に対して $\nabla_V f(p) = 0$ をみたす $V \neq (0,0)$ があれば，この点 p を f の特異点，そうでない点を正則点とよぶ。f が good であれば，f の特異点の全体は D の中の正則曲線をなす。これを示すには複素関数論での陰関数定理（例えば Gunning-Rossi の本）を用いればよい。この曲線の局所座標に関して，1次微分が0でないとき，点 p は fold point，1次微分は0であるが2次微分が0でないとき，点 p は cusppoint とよばれる。D が regular，fold，cusp のいづれかの点のみからなりたっているとき，f は excellent であるといわれる。D の各点に f の3次迄の偏微分係数を対応させることにより，f には写像 $\tilde{f}: D \longrightarrow \mathbb{C}^{20}$ が対応する。f が excellent でない様な $\mathbb{C}^{20}$ の部分集合 S は15次元の variety をなす。Whitney の論文 [6] のと同じ定理番号を用いると，

定理 11 A．$f_0 : D \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を正則写像とするとき，半径が十分小さい disc $D_0 \subset D$ があって，f_0 は D_0 でいくらでも近くにある excellent な写像により近似される。

証明は S の次元を実次元に直して論文 [6] の §9 の方法を適用し，§11 の単位の分割を使う部分だけを除けば，残りは複素類似が可能である。

定理 15 A　p が fold point ならば，p と $f(p)$ のまわりの双正則な座標変換によって，

$$u = x^2, \qquad v = y$$

の形にできる。

定理16 A　p が cusp point ならば，p と $f(p)$ のまわりの双正則な座標変換により

$$u = xy - x^3, \qquad v = y$$

の形にできる。

証明は陰関数定理を用いて全く類似的にできる。

次に，$p_u : \mathbb{C}(u, v) \longrightarrow \mathbb{C}(u)$ を u 座標への射影とするとき合成写像

$$u : \mathbb{C}^2(x, y) \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}(u, v) \longrightarrow \mathbb{C}(u)$$

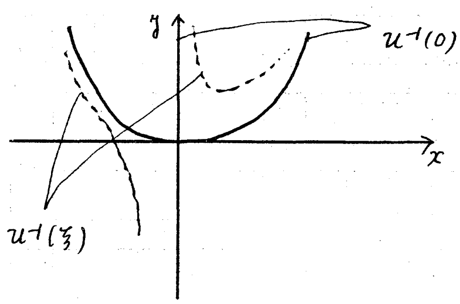
を考える。cusp point は，この合成写像の非退化臨界点である。fold point はそうでない。座標変換

$$\begin{cases} X = x, & z_1 = \dfrac{X + Y}{2} \\ Y = y, & z_2 = -\dfrac{X - Y}{2} i \end{cases}$$

によって，$\mathbb{C}(u) \ni \xi$ に対して，cusp point の近くで，$u^{-1}(\xi)$ は

$$z_1^2 + z_2^2 = \xi$$

で表わされる。写像 u は $u^{-1}(0)$，$u^{-1}(\xi)$ に関して，次の図



からわかる様に Fáry 論文 [3] の仮定 1,2 をみたしている。又 Fáry [2] は写像に層係数コホモロジースペクトル系列を associate させている。そこで係数として K 群, 更に f の値域に工夫をこらして KR 群を用いたらどうなるか興味深い問題の様であるが, 筆者は未だその differential の様子等を調べる所に近至っていない。

次に $n+1$ 次元複素空間 $\mathbb{C}^{n+1}(z_1, \cdots, z_{n+1})$ の中で

$$Q^{n+1}_{\pm 1} : z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = \pm 1$$

とおく。$\mathbb{R}^{n+1}$ を実 $n+1$ 次元空間とするとき,

$$E^{n+1}_{+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\| = 1, \text{内積}(x, y) = 0\}$$

は球面 $S^{0,n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\| = 1\}$ ([1] Atiyah の記号) の接ベクトル束であり, Real な写像 $(x, y) \longrightarrow (x_k\sqrt{1+\|y\|^2} + iy_k,\ k = 1, \cdots, n+1)$ により Q^{n+1}_{+1} は $S^{0,n+1}$ の接ベクトル束とみれる。しかしこれは Real なベクトル束ではない。又

$$E^{n+1}_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} ; \|y\| = 1, \text{内積}(x, y) = 0\}$$

は球面 $S^{n+1,0}$ の接ベクトル束であり, Real な写像

$$(x, y) \longrightarrow (x_k + iy_k\sqrt{1+\|x\|^2},\ k = 1, \cdots, n+1)$$

により Q^{n+1}_{-1} は $S^{n+1,0}$ の接ベクトル束とみれる。

$KR(Q^{n+1}_{\pm 1})$ を求めることは論文 [1] にも述べてある様に興味深い問題の様である。

注意 1. Whitney の good mapping $f : \mathbb{R}^2(x, y) \longrightarrow \mathbb{R}^2(u, v)$ は正則な

写像 $\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ から得られたものではない。もしそうであれば $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, 従って $u_x=u_y=v_x=0$ ならば $v_y=0$ となるからである。[6] §6 参照。

注意2. 円周 S^1 の接束は自明束であるが, E^2_{-1} は Real 空間としては $S^{2,0}\times\mathbb{R}^{0,1}$ ではない。E^2_{+1} はどうであろうか。

参考文献

[1] M.F. Atiyah, K-theory and Reality, Quart. J. Math. 17 (1966) 367–386

[2] I. Fáry, Valeurs critiques et algébres spectrales d'une applications, Ann. of Math. 63 (3), 1956, 437–490.

[3] I. Fáry, Cohomologie des variétés algebriques, Ann. of Math. 65 (1), 1957, 21–73

[4] H. Hopf, Schlichte Abbildungen und lokale modifikationen 4-dimensionaler komplexer mannigfaltigkeiten, Comm. math. Helv. 29, 1955, 132–156.

[5] G. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, I.H.E.S. Publ. Math. 34, 1968, 105–112.

[6] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces, I. mappings of the plane into the plane, Ann. of Math. 62 (3), 1955, 374–410

[7] H. Whitney et F. Bruhat, Quelques propriétés fondamentales des ensemble analytiques-réels, Comm. math. Helv. 33, 1959, 132–160